

7.-8. klasei

VĒRTĒŠANAS PIEEJA UN IZPRATNES LĪMENI MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDĒS

Meistarklase

Maruta Avotiņa
Rīgas Valsts 1. ģimnāzija

10.03.2023.

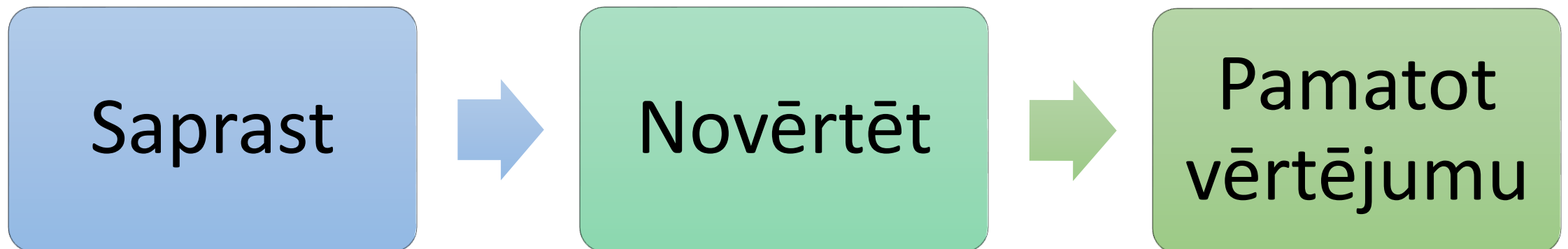
Meistarklases plāns

- ❑ 2022./2023. m.g. 2. posma uzdevumi
- ❑ Atrisinājumu analīze
- ❑ Vērtēšanas kritēriji

Uzdevuma risināšana



Uzdevuma vērtēšana



Uzdevumu risināšanas stratēģijas

- izveido zīmējumu vai diagrammu
- izveido sakārtotu sarakstu
- izveido tabulu
- izspēlē doto situāciju, izmanto konkrētus objektus
- atrodi sakarību
- atrisini vienkāršāku uzdevumu
- mini un pārbaudi
- sāc no beigām
- uzraksti vienādojumu
- izmanto formulu
- sadali daļās
- izslēdz iespējas
- apskati speciālgadījumus
- izmanto simetriju
- izmanto loģisko spriešanu

Kā sagatavoties skolēnu darbu vērtēšanai?

- ☐ Izlasīt uzdevumu
- ☐ Mēģināt atrisināt uzdevumu
- ☐ Izpētīt un saprast doto atrisinājumu
- ☐ Apdomāt vērtēšanas kritērijus
- ☐ Apskatīt vairākus skolēnu darbus
- ☐ Piefiksēt atšķirīgās risinājumu idejas
- ☐ Sākt vērtēšanu

7. klase

7.1. Vai tukšajās rūtiņās var ierakstīt pa vienam naturālam skaitlim tā, lai rezultātā būtu ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 25 un katri divi skaitļi, kuru starpība ir 1, būtu ierakstīti rūtiņās ar kopīgu malu?

	6			
				24
			2	
	15			

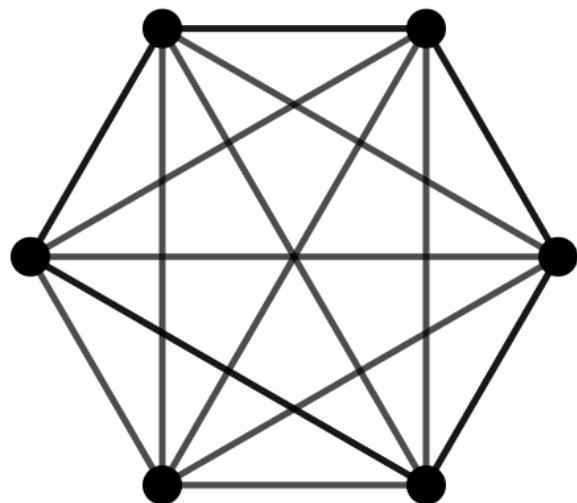
Atrisinājums. Jā, var.

7	6	5	4	25
8	11	12	3	24
9	10	13	2	23
16	15	14	1	22
17	18	19	20	21

7.1.	Atbilde “jā”	1
	Pareizs skaitļu izvietojums	9
	iesākts izvietot (atbilstoši uzdevuma nosacījumiem) skaitļus, bet nav pabeigts	ne vairāk kā 3

7.2. Vai **a)** 90 lampiņas, **b)** 73 lampiņas ar vadiem var savienot tā, lai katra no tām būtu savienota ar vadu ar tieši 5 citām lampiņām?

Atrisinājums. a) Jā, var. Sadalām 90 lampiņas 15 grupās pa 6 lampiņām katrā grupā. Katras grupas katras divas lampiņas savienojam ar vadu (skat. attēlu, kur lampiņas attēlotas ar punktiem un vadi ar nogriežņiem, kas šos punktus savieno). Šādā veidā katra no 90 lampiņām būs savienota ar tieši 5 citām lampiņām.



b) Tā kā no katras lampiņas iziet 5 vadi, tad vadu galu skaits ir $73 \cdot 5 = 365$. Bet katram vadam ir 2 gali, tāpēc kopējais galu skaits nevar būt nepāra skaitlis. Tāpēc 73 lampiņas ar vadiem nevar savienot savā starpā tā, lai katra no tām būtu savienota tieši ar 5 citām lampiņām.

7.2.	Par a) gadījumu	Kopā 5
	Atbilde “jā”	1
	Parādīts derīgs piemērs	4
	Par b) gadījumu	Kopā 5
	Atbilde “nē”	1
	Ievēro, ka kopā būtu jābūt 365 vadu galiem	1
	Par spriedumu, ka katram vadam ir 2 gali, tāpēc kopējam vadu galu skaitam jābūt pāra skaitam	2
	Secina, ka prasītais nav iespējams, jo 365 nav pāra skaitlis	1
	Par dažiem piemēriem b) gadījumā, kuros neizpildās prasītais	ne vairāk kā 1

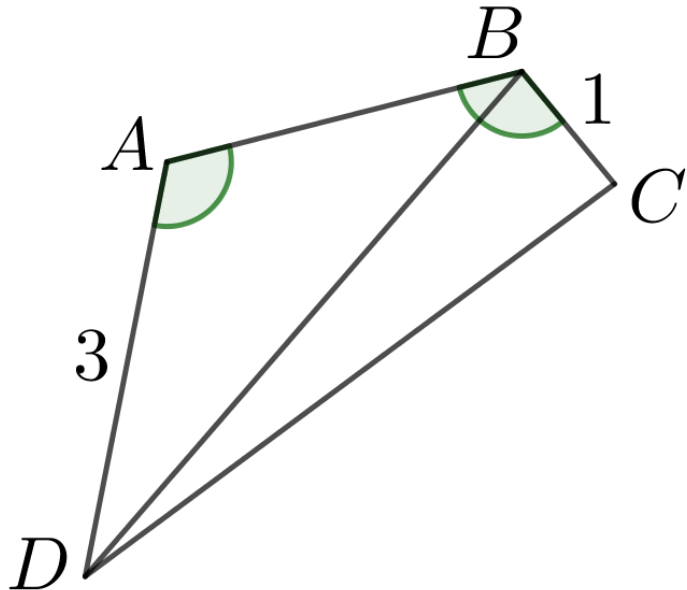
7.3. Dots četrstūris $ABCD$, kuram visi leņķi ir mazāki nekā 180° , $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, $BC = 1$ un $AD = 3$. Pierādīt, ka $CD > 2$.

Atrisinājums. Novelkam nogriezni BD (skat. attēlu).

No dotā izriet, ka $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC > \sphericalangle ABD$.

Tā kā trijstūrī ABD pret lielāku leņķi atrodas garāka mala, tad $BD > AD = 3$.

No trijstūra nevienādības trijstūrī BCD iegūstam, ka $DC > DB - BC > 3 - 1 = 2$.



7.3.	Novelk nogriezni BD	1
	Par spriedumu, ka $\sphericalangle DAB > \sphericalangle ABD$	2
	Pamatots, ka $BD > AD = 3$	2
	Lieto trijstūra nevienādību trijstūrī BCD un iegūst, ka $DC > DB - BC$	2
	Izmanto iepriekš iegūto rezultātu, lai aprēķinātu, ka $DC > DB - BC > AD - BC = 3 - 1 = 2$	3
	Par konkrētiem piemēriem vai par nogriežņu mērīšanu ar lineālu	ne vairāk kā 2
	Ideja par trijstūra nevienādības izmantošanu	1

7.4. Cik ir tādu naturālu skaitļu n , kuriem skaitlim n^2 ir tikpat ciparu, cik skaitlim n^3 ?

Atrisinājums. Ir trīs skaitļi, kam izpildās uzdevuma nosacījumi, šie skaitļi ir 1; 2 un 4, jo $1^2 = 1^3 = 1$; $2^2 = 4$ un $2^3 = 8$ visi ir vienciparu skaitļi, un $4^2 = 16$ un $4^3 = 64$ abi ir divciparu skaitļi.

Pamatosim, ka citu derīgu n vērtību nav.

Skaitlis 3 neder, jo $3^2 = 9$, bet $3^3 = 27$.

Skaitļu no 5 līdz 9 kvadrāti ir divciparu skaitļi, jo $5^2 = 25$ un $9^2 = 81$ abi ir divciparu, tāpat arī skaitļu 6; 7; 8 kvadrāti ir divciparu skaitļi. Šo skaitļu kubi ir trīsciparu skaitļi, jo $5^3 = 125$ un $9^3 = 729$ abi ir trīsciparu, tāpat pa vidu esošo skaitļu kubi arī ir trīsciparu skaitļi.

Skaitļiem, kas lielāki nekā 9, lai no skaitļa kvadrāta iegūtu skaitļa kubu, tie jāreizina ar pašu skaitli, tāpat vismaz ar 10. Tādā gadījumā skaitļa kuba ciparu skaits ir vismaz par 1 lielāks nekā šī skaitļa kvadrāta ciparu skaits.

7.4.	Uzrādīti skaitļi 1, 2 un 4	3
	Pārbaude, ka skaitļi 1, 2 un 4 atbilst nosacījumiem (uzrakstīti skaitļu kvadrāti un kubi)	1
	Pamatots, ka pārējie viencilapa naturālie skaitļi neder	2
	Pamatots, ka skaitļiem, kas lielāki kā 9, nevar izpildīties prasītā īpašība	4

7.5. Kastē atrodas baltas, sarkanas un zaļas lodītes. Ar vienu gājienu no kastes var izņemt divas dažādu krāsu lodītes un ielikt kastē vienu trešās krāsas lodīti (vienmēr pietiek jebkuras krāsas lodīšu, ko ielikt kastē). Vai var panākt, ka kastē paliek tikai viena lodīte, ja sākumā kastē atrodas:

a) 10 baltas, 12 sarkanas un 16 zaļas lodītes;

b) 10 baltas, 12 sarkanas un 15 zaļas lodītes?

Atrisinājums

a) Nē, nevar. Ar katru gājienu visu krāsu lodīšu skaita paritāte mainās (no pāra skaitļa uz nepāra skaitli un otrādi). Tāpēc nevaram iegūt situāciju, ka divi lodīšu skaiti ir 0 (pāra skaitlis), bet viens skaits ir 1 (nepāra skaitlis), jo sākumā visu krāsu lodīšu skaits ir pāra skaitlis.

b) Jā, var. Ar trīs pēc kārtas sekojošiem gājieniem ņemot balta-sarkana (apzīmēsim ar *bs*), balta-zaļa (apzīmēsim ar *bz*), sarkana-zaļa (apzīmēsim ar *sz*), katras krāsas lodīšu skaits samazinās par 1. Atkārtojot 9 reizes šādu gājienu trijniekus, iegūstam, ka kastē ir 1 balta, 3 sarkanas un 6 zaļas lodītes. Tālāk ar gājieniem *sz*, *sz*, *bz* izveidojam situāciju, ka kastē ir 2 baltas, 2 sarkanas un 3 zaļas lodītes. To ar gājieniem *bs*, *sz*, *bz*, *sz*, *bz*, *bs* pārveidojam par situāciju, kad kastē ir 0 baltas, 0 sarkanas un 1 zaļa lodīte.

7.5.	Par a) gadījumu	Kopā 5
	Atbilde “nē”	1
	Skaidro, ka katrā gājienā visu lodīšu paritāte mainās	2
	Ievērots, ka rezultātā jāiegūst situācija, kurā ir divi pāra skaitļi un viens nepāra skaitlis	1
	Secina, ka prasītais nav iespējams, jo sākotnēji visas lodītes ir pāra skaitā	1
	Par b) gadījumu	Kopā 5
	Atbilde “jā”	1
	Uzrakstīts, kā panākt prasīto	4
	Par piemēriem, kur neiegūst prasīto situāciju	ne vairāk kā 2

8. klase

8.1. Ieraksti katrā tukšajā rūtiņā (skat. attēlu) vienu pirmskaitli (skaitļi var būt arī vienādi) tā, lai katrās četrās blakus rūtiņās skaitļu summa būtu viena un tā pati un visu rūtiņās ierakstīto skaitļu (ieskaitot abus dotos skaitļus) summa būtu 127. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to var izdarīt.

[illegible]

Atrisinājums. To var izdarīt, kā parādīts attēlā, kur katru četru pēc kārtas ierakstītu skaitļu summa ir 36.

3	5	11	17	3	5	11	17	3	5	11	17	3	5	11
---	---	----	----	---	---	----	----	---	---	----	----	---	---	----

Atrisinājums. To var izdarīt, kā parādīts 17. att., kur katru četru pēc kārtas ierakstītu skaitļu summa ir 36.

3	5	11	17	3	5	11	17	3	5	11	17	3	5	11
---	---	----	----	---	---	----	----	---	---	----	----	---	---	----

17. att.

Piezīme. Paskaidrosim, kā šos skaitļus var atrast. Aplūkojam piecas rūtiņas pēc kārtas, kurās ierakstīti skaitļi x ; a ; b ; c un y (skat. 18. att.).

x	a	b	c	y
-----	-----	-----	-----	-----

18. att.

Tā kā katrās četrās blakus rūtiņās skaitļu summa ir viena un tā pati, tad $x + a + b + c = a + b + c + y$, tātad $x = y$ un rūtiņās x un y jābūt ierakstītam vienam un tam pašam skaitlim. Tātad rūtiņās ierakstītie skaitļi atkārtojas ar periodu 4 (skat. 19. att.), kur m un n ir kādi vēl nezināmi pirmskaitļi.

3	m	11	n	3	m	11	n	3	m	11	n	3	m	11
---	-----	----	-----	---	-----	----	-----	---	-----	----	-----	---	-----	----

19. att.

No tā, ka visu skaitļu summa ir 127 iegūstam, ka $4m + 3n = 127 - (3 + 11) \cdot 4 = 71$, no kā iegūstam, ka $n = (71 - 4m) : 3$. Aplūkosim dažas iespējamās pirmskaitļa m vērtības, līdz iegūsim derīgu n vērtību:

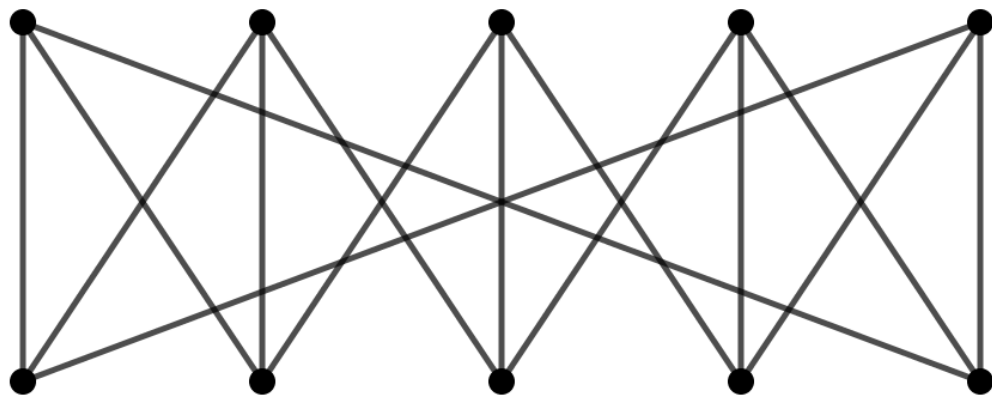
- ja $m = 2$, tad $n = (71 - 8) : 3 = 21$ (nav pirmskaitlis);
- ja $m = 3$, tad $n = (71 - 12) : 3 = 19\frac{2}{3}$ (nav pirmskaitlis);
- ja $m = 5$, tad $n = (71 - 20) : 3 = 51 : 3 = 17$ (pirmskaitlis).

8.1.	Pareizs skaitļu izvietojums	10
	Par daļēju aizpildījumu 3, m, 11, n, 3, m, 11, n, 3, m, 11, n, 3, m, 11	5
	Pieminēts skaitlis 5, 17 vai 36	2
	Par ideju, ka skaitļiem periodiski jāatkārtojas	2

8.2. Pasākumā satikās m cilvēki. Katrs no tiem draudzējas ar tieši 3 citiem cilvēkiem (ja A draudzējas ar B , tad B draudzējas ar A). Zināms, ka no katriem trim cilvēkiem var atrast divus, kuri savā starpā nedraudzējas. Vai var gadīties, ka **a)** $m = 11$, **b)** $m = 10$?

Atrisinājums. a) Nē, nevar. Cilvēkus iedomāsimies kā punktus, bet draudzības kā nogriežņus, kas šos punktus savieno. Tā kā no katra punkta iziet tieši 3 nogriežņi un katru nogriezni ieskaitām divas reizes (nogrieznis AB un BA ir viens un tas pats nogrieznis), tad kopējais nogriežņu skaits ir $11 \cdot 3 : 2 = 16,5$. Iegūta pretruna, jo nogriežņu skaitam ir jābūt naturālam skaitlim.

b) Jā, var gadīties, piemēram, skat. attēlu. Dotajā piemērā dalībnieki sadalīti divās grupās pa pieciem dalībniekiem tā, ka katrs pirmās grupas dalībnieks draudzējas ar tieši trīs dalībniekiem no otrās grupas, bet nedraudzējas ar nevienu savas grupas dalībnieku. Tā kā starp jebkuriem trīs dalībniekiem vismaz divi atrodas vienā grupā, tad tie savā starpā nedraudzējas un uzdevuma nosacījumi izpildās.



8.2.	Par a) gadījumu	Kopā 5
	Atbilde “nē”	1
	Aprēķināts nepieciešamais draudzību skaits (vai nogriežņu galu skaits), lai izpildītos prasība	3
	legūst pretrunu ar to, ka draudzību skaitam jābūt naturālam skaitlim (vai nogriežņu galapunktu skaitam jābūt pāra skaitlim)	1
	Par b) gadījumu	Kopā 5
	Atbilde “jā”	1
	Pareizs piemērs	4
	Par dažiem piemēriem, kuros neizpildās prasītais	ne vairāk kā 2

8.3. Dots vienādsānu trijstūris ABC , kuram $AB = BC$. Uz malas AB izvēlēts punkts M un uz malas BC izvēlēts punkts K tā, ka $AM = AK = AC$. Zināms, ka $AK \perp MC$. Aprēķināt trijstūra ABC leņķus!

Atrisinājums

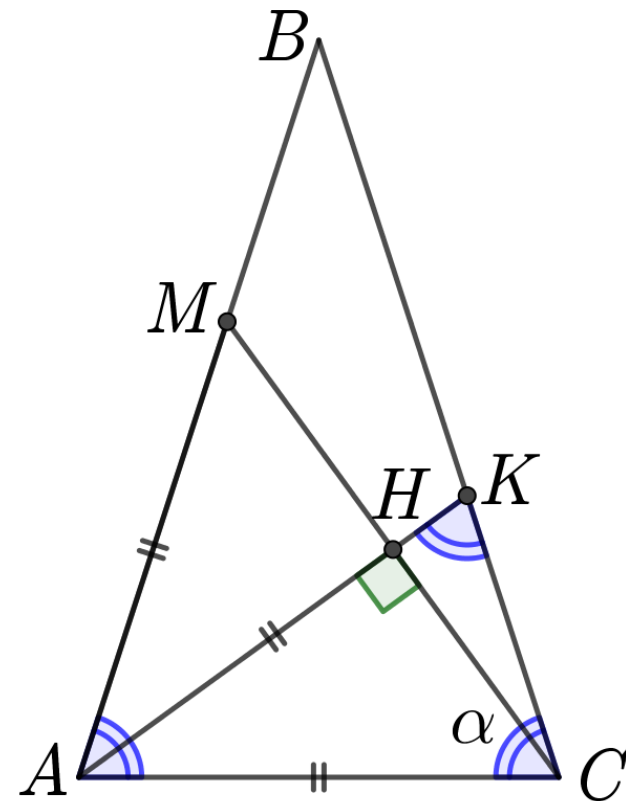
Apzīmējam AK un MC krustpunktu ar H (skat. attēlu).

Tā kā $\triangle KAC$ un $\triangle ABC$ ir vienādsānu trijstūri, tad $\sphericalangle AKC = \sphericalangle ACK = \sphericalangle BAC = \alpha$.

Nogrieznis AH ir vienādsānu trijstūra MAC augstums pret pamatu, tātad arī bisektrise, tāpēc $\sphericalangle KAC = \sphericalangle BAC : 2 = \frac{\alpha}{2}$.

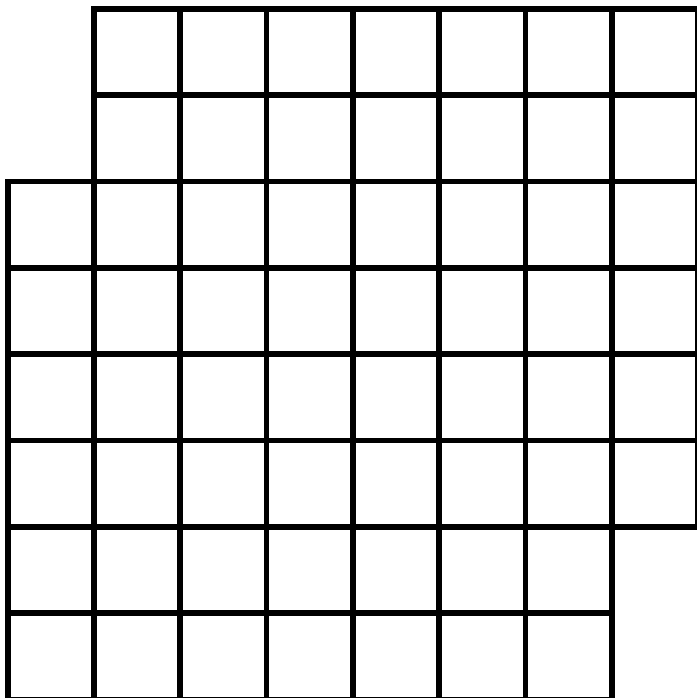
Tā kā trijstūra KAC iekšējo leņķu summa ir 180° , tad iegūstam, ka $\frac{\alpha}{2} + \alpha + \alpha = 180^\circ$, no kurienes $\frac{5}{2}\alpha = 180^\circ$ jeb $\alpha = 72^\circ$.

Tātad $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB = 72^\circ$ un $\sphericalangle B = 180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ$.

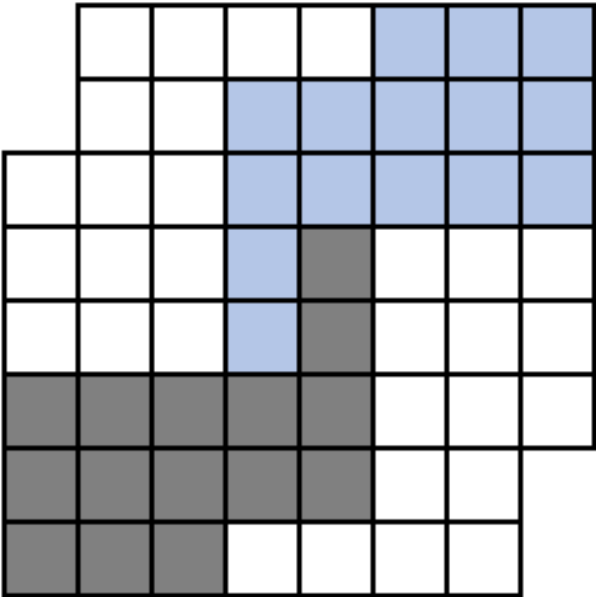
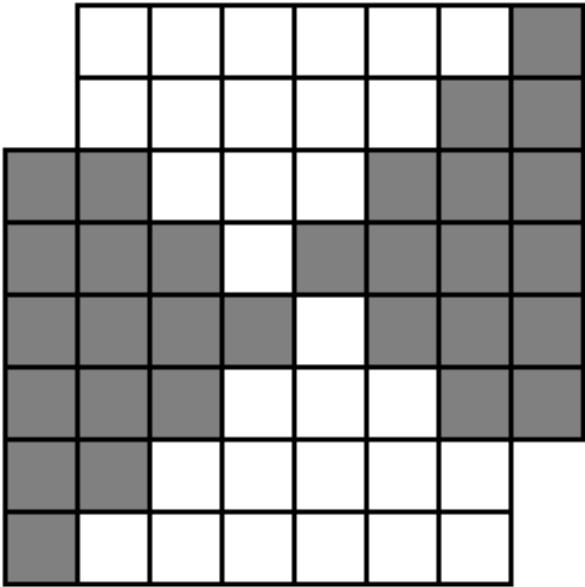


8.3.	Pamato, ka $\sphericalangle AKC = \sphericalangle ACK = \sphericalangle BAC$	3
	Pamato, ka nogrieznis AH ir trijstūra MAC bisektrise	2
	Iegūst, ka $\sphericalangle KAC = \frac{1}{2} \sphericalangle BAC$	2
	Uzraksta vienādojumu attiecībā pret ΔKAC iekšējo leņķu summu	1
	Iegūst, ka $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB = 72^\circ$	1
	Aprēķina $\sphericalangle ABC$	1
	Par zīmējumu, kur attēlots tikai dotais	0

8.4. Parādi, kā, griežot pa rūtiņu līnijām, attēlā doto figūru var sagriezt 4 vienādās figūrās! Figūras ir vienādas, ja tās var uzlikt vienu uz otras tā, ka abas figūras sakrīt (figūras var pagriezt un apmest otrādi).



Atrisinājums. Skat. attēlu.



8.4.	Par pareizu sadalījumu	10
	Aprēķināts, ka katrai figūrai jā sastāv no 15 rūtiņām	2
	Dotā figūra sadalīta vienlielās (bet ne vienādās) figūrās	1

8.5. Pa aplūveida trasi vienā virzienā Kārlis skrien ar kājām un Sandris brauc ar skrejriteni, bet pretējā virzienā Vilnis brauc ar velosipēdu un Mārtiņš ar mopēdu (katrs brauc ar savu, nemainīgu ātrumu). Zināms, ka Kārlis satiek Vilni ik pēc 12 minūtēm, Sandris apdzen Kārli ik pēc 20 minūtēm, bet Mārtiņš apdzen Vilni ik pēc 5 minūtēm. Cik bieži Mārtiņš satiek Sandri?

Atrisinājums. Apzīmēsim Kārļa ātrumu ar k , Sandra ātrumu ar s , Viļņa ātrumu ar v , Mārtiņa ātrumu ar m un trases garumu ar l .

No tā, ka Kārlis satiek Vilni ik pa 12 minūtēm, izriet, ka $k + v = \frac{l}{12}$.

No tā, ka Sandris apdzen Kārli ik pa 20 minūtēm, izriet, ka $s - k = \frac{l}{20}$.

No tā, ka Mārtiņš apdzen Vilni ik pa 5 minūtēm izriet, ka $m - v = \frac{l}{5}$.

Tā kā $m + s = (m - v) + (s - k) + (k + v) = \frac{l}{5} + \frac{l}{20} + \frac{l}{12} = \frac{l}{3}$, tad secinām, ka Mārtiņš

Satiek Sandri ik pēc 3 minūtēm.

8.5.	Uzrakstītas izteiksmes, kas izsaka, cik ātri trase tiek apceļota vienu reizi, izmantojot dotos lielumus	6
	Iepriekšminētās izteiksmes tiek summētas, lai izteiktu, cik ātri Mārtiņš un Sandris kopā apceļo vienu apli	3
	Par atbildi 3 minūtes	1

Kritēriji	Punkti
Uzdevums nav risināts; tīrrakstā nav minēts pat uzdevuma numurs.	– (svītriņa)
Tīrrakstā minēts uzdevuma numurs, bet risinājumā nav nevienas vērtīgas idejas, kas varētu vest pie pareiza atrisinājuma.	0
Dažas derīgas idejas, bet bez tālākas izmantošanas vai pamatojuma.	1 – 2
Veiksmīgi iesākts risinājums, bet nav saskatīts virziens, kā turpināt iesākto un novest līdz galam.	3 – 4
Puse risinājuma.	5
Pareizi iesākts un turpināts risinājums, kas tomēr nav paspēts vai prasts novest līdz pašam galam.	6
Principā pareizs risinājums, bet ir kāda lielāka iebilde, nepilnība, trūkums.	7
Uzdevums atrisināts, bet risinājumam nelieli defekti – trūkst kāda paskaidrojuma, izlaistas mazāk būtiskas, bet tomēr nepieciešamas detaļas u.tml.	8 – 9
Absolūti pareizs un skaidri saprotami pierakstīts risinājums bez iebildēm, piebildēm un citiem trūkumiem.	10