

Anotācija

Nodarbībā tiek aplūkoti kompleksi uzdevumi, kuros jāsaista dažādu tēmu zināšanas un prasmes rīkoties jaunā situācijā.

Nodarbības rezultātā meistarklases dalībnieki būs ieguvuši zināšanas un pilnveidojuši prasmes, kas nepieciešamas, lai risinātu un skaidrotu kompleksus matemātikas uzdevumus. Piemēram, lieto dažādas metodes un stratēģijas uzdevumu risināšanā, izvērtē uzdevuma atrisināšanai nepieciešamās zināšanas un prasmes.

Kursu tematika aplūko:

vektoru izmantošanu uzdevumu risināšanā.

VEKTORI TELPĀ

Lietojumi

- Figūru veida noteikšana
- Leņķa starp taisnēm aprēķināšana
- Paralelitātes / perpendikularitātes pamatošana
- Punkta piederība taisnei
- Nogriežņu attiecības iegūšana

Formulas

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$$

$$\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b}$$

$$A(x_1; y_1; z_1)$$

$$B(x_2; y_2; z_2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

Figūras veida noteikšana un īpašību pamatošana, ja dotas punktu koordinātas

1. Doti punkti $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -4)$, $C(-1; 1; 2)$ un $D(1; -2; 8)$. Pierādīt, ka $ABCD$ ir paralelograms!

Aprēķinām vektoru koordinātas:

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-2; 3; -6) \\ \overrightarrow{DC} = (-2; 3; -6) \end{array} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$$

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = (-2; -1; 6) \\ \overrightarrow{AD} = (-2; -1; 6) \end{array} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$$

Tātad $ABCD$ ir paralelograms, jo tā pretējās malas ir pa pāriem paralēlas.

2. Pierādīt, ka četrstūris $ABCD$ ir trapece, ja $A(-1; 2; 3)$, $B(2; -1; 1)$, $C(1; -3; -1)$, $D(-5; 3; 3)$.

Aprēķinām vektoru koordinātas:

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3; -3; -2) \\ \overrightarrow{DC} = (6; -6; -4) \end{array} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC} \text{ un } |\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{DC}|$$

Tātad četrstūris $ABCD$ ir trapece, jo tā divas pretējās malas ir paralēlas un dažāda garuma.

3. Doti punkti $A(7; 2; 4)$, $B(4; -4; 2)$ un $C(6; -7; 8)$. Pierādīt, ka ABC ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris!

Aprēķinām vektoru koordinātas:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (-3; -6; -2) \\ \overrightarrow{BC} &= (2; -3; 6)\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = 7$$

Aprēķinām vektoru skalāro reizinājumu:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -6 + 18 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$$

Tātad trijstūris ABC ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, jo tā divas malas ir vienāda garuma un perpendikulāras.

4. Doti punkti $A(-1; 3; 0)$, $B(1; 2; 2)$, $C(2; 5; 1)$ un $D(3; -1; 2)$. Pierādīt, ka četrstūra $ABCD$ diagonāles ir perpendikulāras!

Aprēķinām vektoru koordinātas:

$$\overrightarrow{AC} = (3; 2; 1)$$

$$\overrightarrow{BD} = (2; -3; 0)$$

Aprēķinām vektoru skalāro reizinājumu:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 6 - 6 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$$

Tātad četrstūra $ABCD$ diagonāles ir perpendikulāras.

5. Aprēķināt trijstūra ABC leņķa B kosinusu, ja $A(1; 0; -2)$, $B(0; 2; 0)$, $C(-3; 0; 6)$.

Izmantosim formulu:

$$\cos \sphericalangle B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}$$

Aprēķinām vektoru koordinātas:

$$\overrightarrow{BA} = (1; -2; -2)$$

$$\overrightarrow{BC} = (-3; -2; 6)$$

Līdz ar to

$$\cos \sphericalangle B = \frac{-3 + 4 - 12}{\sqrt{1 + 4 + 4} \cdot \sqrt{9 + 4 + 36}} = -\frac{11}{21}$$

6. Aprēķināt leņķi starp kuba diagonāli un kuba skaldnes diagonāli, ja tās abas iziet no vienas virsotnes!

Jāaprēķina: $\sphericalangle ACB$

- 1) Novietojam kubu pirmajā oktantā un pieņemam, ka kuba šķautnes garums ir 1 vienība.
- 2) Nosakām virsotņu koordinātas: $A(1; 0; 0)$, $B(1; 1; 0)$ un $C(0; 1; 1)$.
- 3) Lai aprēķinātu prasīto leņķi, izmantosim vektoru skalāro reizinājumu:

$$\cos \sphericalangle ACB = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|}$$

4) $\overrightarrow{CA} = (1; -1; -1)$

5) $\overrightarrow{CB} = (1; 0; -1)$

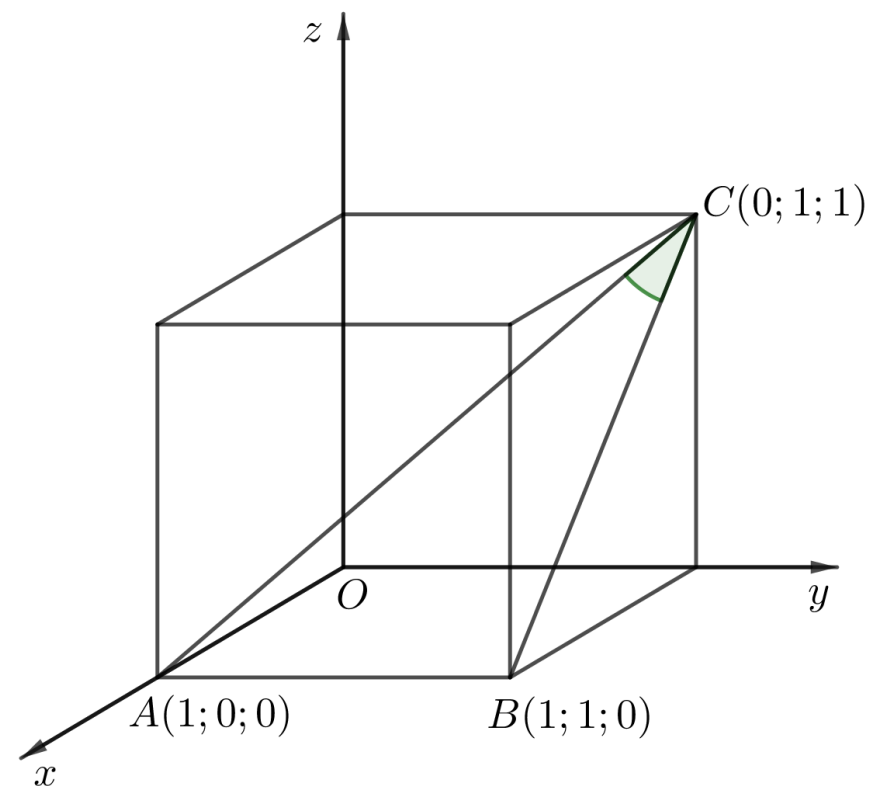
6) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 1 - 0 + 1 = 2$

7) $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$

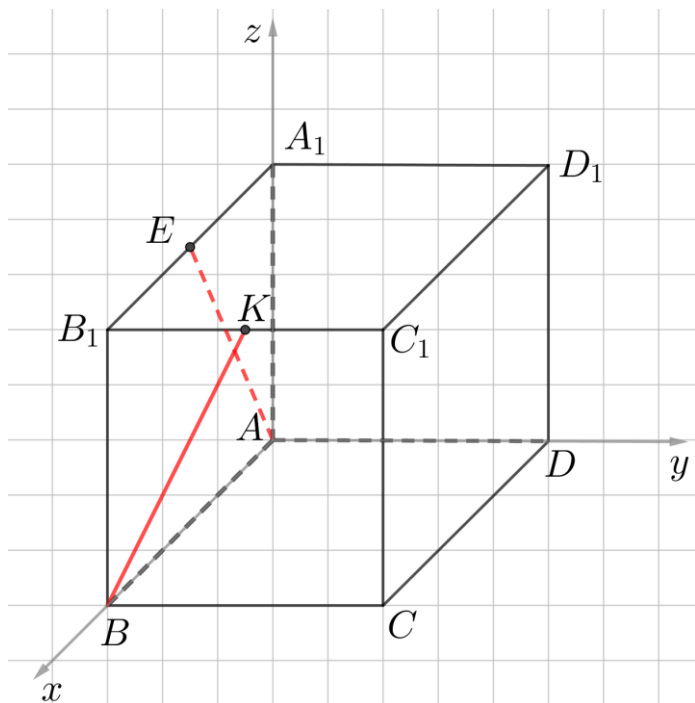
8) $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$

9) $\cos \sphericalangle ACB = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

10) $\sphericalangle ACB = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$



7. Kuba $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ šķautnes garums 1 cm. Punkts E ir šķautnes $A_1 B_1$ viduspunkts un K ir šķautnes $B_1 C_1$ viduspunkts. Aprēķināt kosinusu leņķim starp taisnēm AE un BK .



1) Ieviešam koordinātu sistēmu, kuras sākumpunkts ir punktā A , mala AB atrodas uz x ass, mala AD – uz y ass un AA_1 – uz z ass

2) Uzrakstām punktu koordinātas

$$A(0; 0; 0), \quad B(1; 0; 0), \quad E\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), \quad K\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$$

3) Aprēķinām vektoru koordinātas un garumus:

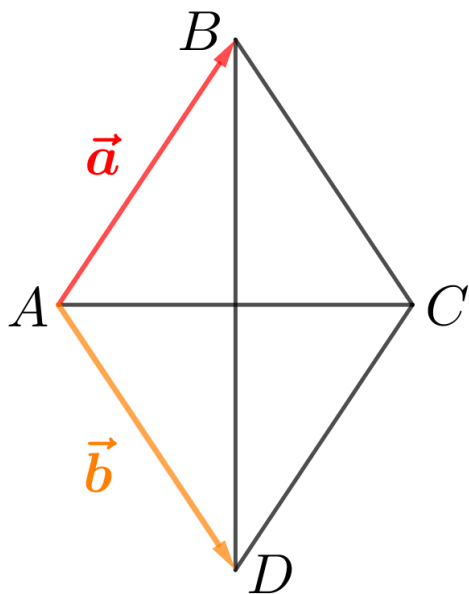
$$\overrightarrow{AE} = \left(\frac{1}{2}; 0; 1\right) \quad \text{un} \quad \overrightarrow{BK} = \left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$$

$$|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{un} \quad |\overrightarrow{BK}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

4) Izmantojot skalāro reizinājumu, aprēķinām prasīto:

$$\cos \sphericalangle(AE, BK) = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BK}}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{BK}|} = \frac{0 + 0 + 1}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{4}{5}$$

8. Pierādīt, ka romba diagonāles ir perpendikulāras.



1) Apskatām vektorus $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ un $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$

2) Ar šiem vektoriem izsakām vektorus, kas atrodas uz romba diagonālēm:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{b}$$

3) Aprēķinām abu vektoru skalāro reizinājumu:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = -|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = -AB^2 + AD^2 = 0$$

4) Tā kā $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, tad $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ un līdz ar to arī $AC \perp BD$

9. Trijstūrī jebkuras malas kvadrāts ir vienāds ar pārējo divu malu kvadrātu summu, no kuras atņemts divkārtšots šo malu reizinājums ar kosinusu no leņķa starp tām:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos \sphericalangle ACB.$$

Pierādījums

- 1) Apskatām vektorus $\overrightarrow{CB}$ un $\overrightarrow{CA}$.
- 2) Izsakām $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.
- 3) Izmantojam vektora skalāro kvadrātu, jo tas ir vienāds ar vektoram atbilstošā nogriežņa garumu:

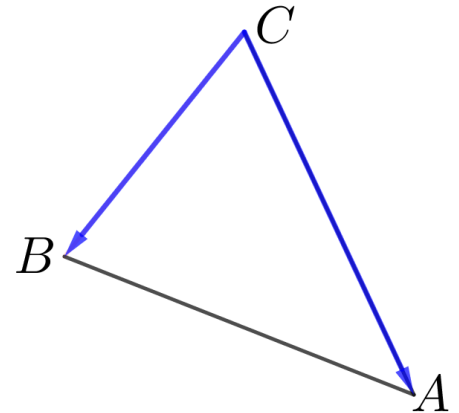
$$\overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = AB^2$$

- 4) Aprēķinām skalāro kvadrātu citā veidā, izmantojot 2) punktā iegūto sakarību:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}^2 &= (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) \cdot (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}^2 = \\ &= CB^2 + CA^2 - 2 \cdot \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = CB^2 + CA^2 - 2 \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cdot \cos \sphericalangle ACB = \\ &= CB^2 + CA^2 - 2 \cdot CB \cdot CA \cdot \cos \sphericalangle ACB.\end{aligned}$$

- 5) Apvienojot 3) un 4) punktu, iegūstam

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos \sphericalangle ACB.$$

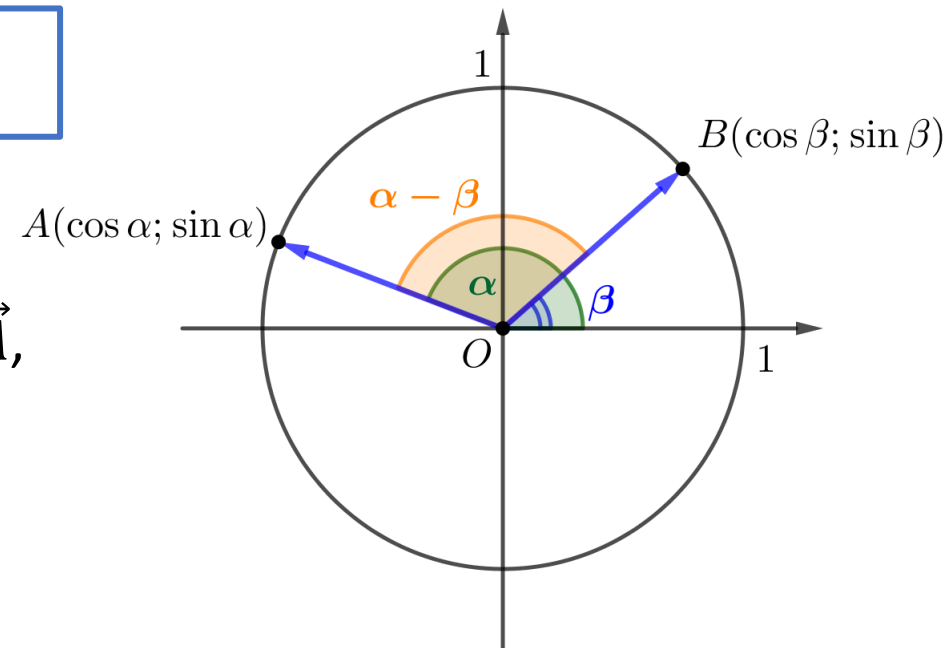


10. Pierādīt, ka $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.

Pierādījums

- 1) Apskatām trigonometrisko riņķa līniju un vektorus $\overrightarrow{OB}$ un $\overrightarrow{OA}$, kas ar Ox ass pozitīvo virzienu veido attiecīgi leņķi β un α .
- 2) Izmantojot trigonometrisko funkciju definīcijas, iegūstam, ka $A(\cos \alpha; \sin \alpha)$ un $B(\cos \beta; \sin \beta)$.
- 3) Aprēķinām vektoru koordinātas: $\overrightarrow{OB} = (\cos \beta; \sin \beta)$ un $\overrightarrow{OA} = (\cos \alpha; \sin \alpha)$.
- 4) Vektoru skalāro reizinājumu aprēķināt divos dažādos veidos:
 - $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha$
 - $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \cos \sphericalangle AOB = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta)$
- 5) Tātad esam ieguvuši:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$



Kolineāri vektori

Definīcija. Ja vektori atrodas uz vienas un tās pašas taisnes vai uz paralēlām taisnēm, tad tos sauc par kolineāriem vektoriem.

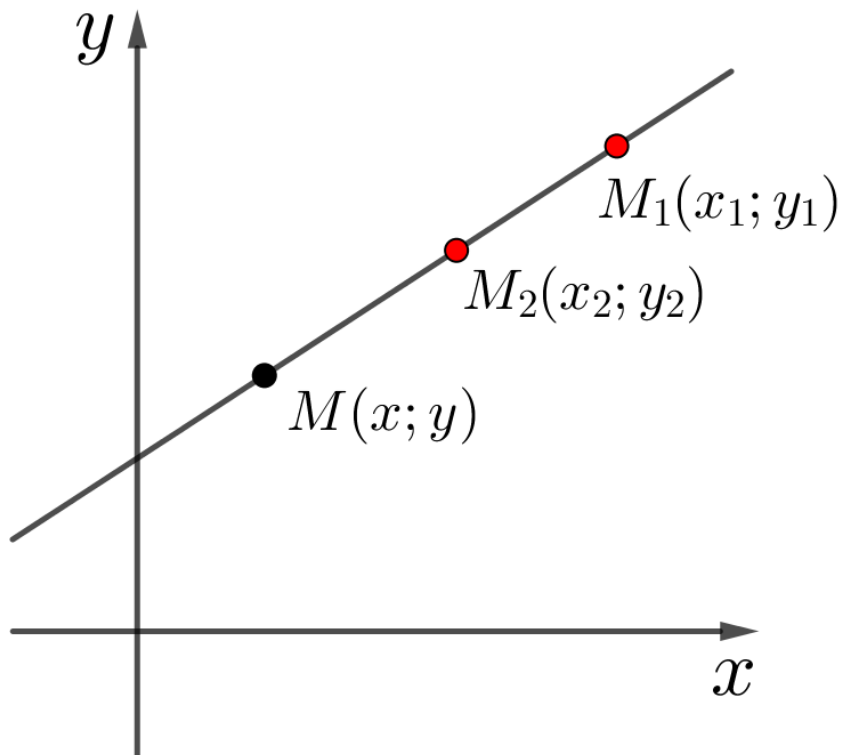
Teorēma. Divi nenulles vektori ir kolineāri tad un tikai tad, ja viens no tiem ir otra reizinājums ar kādu skaitli.

No kolinearitātes definīcijas izriet šāda apgalvojuma patiesums:

Punkti A, B, C atrodas uz vienas taisnes tad un tikai tad, ja vektori $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{AC}$ ir kolineāri.

Lai pierādītu, ka $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{AC}$ ir kolineāri, pietiek pierādīt, ka $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$, kur k ir patvaļīgs skaitlis.

Taisnes vienādojums, ja doti divi taisnes punkti



Doti punkti $M_1(x_1; y_1)$ un $M_2(x_2; y_2)$

1) Izvēlamies patvaļīgu taisnes punktu $M(x; y)$

2) Apskatām vektorus

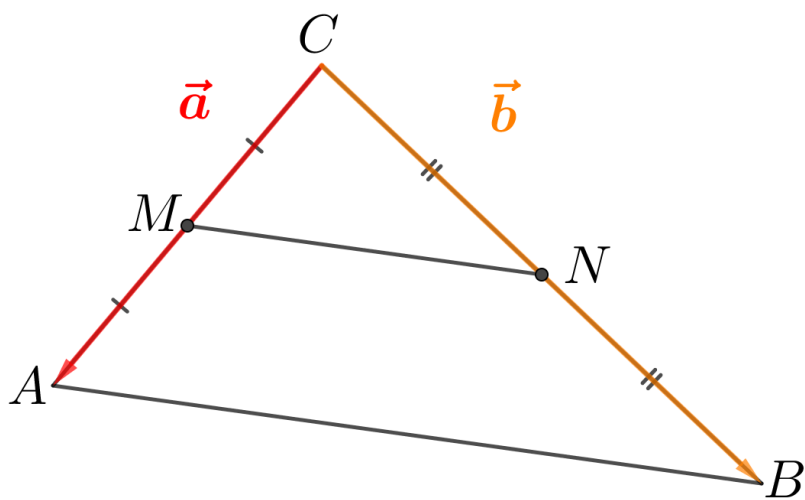
$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$$

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$$

3) Tā kā $\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$ tad to koordinātas ir proporcionālas

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

11. Pierādīt, ka trijstūra viduslīnija ir paralēla trijstūra malai, un tās garums ir vienāds ar pusi no šīs malas garuma.



1) Apskatām vektorus $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ un $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$

2) Ar šiem vektoriem izsakām vektorus, kas atrodas uz trijstūra viduslīnijas un trijstūra malas AB :

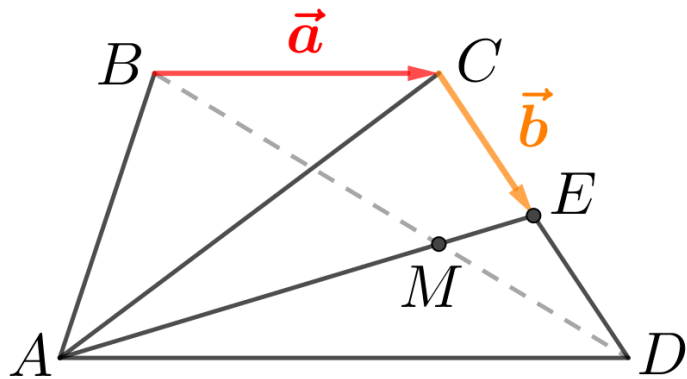
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b})$$

3) Esam ieguvuši, ka $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (vektori ir kolineāri)

4) Tātad $MN \parallel AB$ un $MN = \frac{1}{2}AB$

12. Trapeces $ABCD$ pamata malu BC un AD attiecība ir 1:2; punkts E – sānu malas CD viduspunkts. Punkts M sadala nogriezni AE attiecībā 4:1, skaitot no punkta A . Pierādīt, ka punkts M atrodas uz diagonāles BD .



Pietiks, ja pierādīsim, ka $\overrightarrow{BD} \parallel \overrightarrow{MD}$

1) Apskatām vektorus $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ un $\overrightarrow{CE} = \vec{b}$

2) Ar šiem vektoriem izsakām nepieciešamos vektorus:

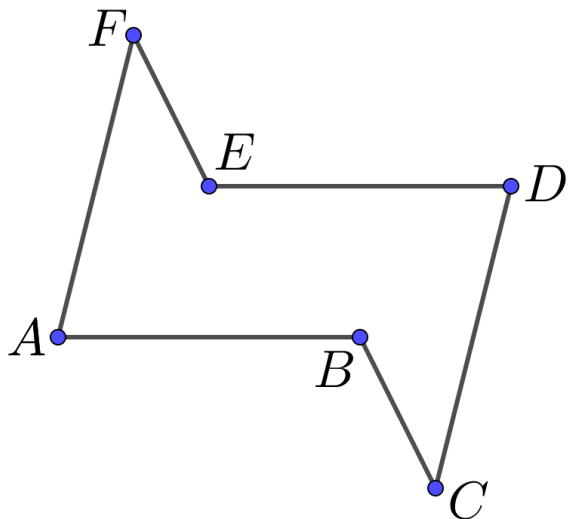
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{ED} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AE} + \vec{b} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) + \vec{b} =$$

$$= \frac{1}{5}(2\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b} = \frac{2}{5}(\vec{a} + 2\vec{b}) = \frac{2}{5}\overrightarrow{BD}$$

3) Tā kā $\overrightarrow{MD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BD}$, tad $\overrightarrow{MD} \parallel \overrightarrow{BD}$ un līdz ar to $M \in BD$

13. Dota slēgta laužta līnija ar sešiem posmiem, kas neatrodas vienā plaknē. Pierādīt šādu apgalvojumu: ja lauztās līnijas ik divi pretējie posmi ir paralēli, tad tie ir arī vienādi.



Dots: $AB \parallel ED$

$BC \parallel EF$

$CD \parallel AF$

Jāpierāda: $AB = ED$

$BC = EF$

$CD = AF$

$$1) AB \parallel ED \Rightarrow \overrightarrow{ED} = k \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$BC \parallel EF \Rightarrow \overrightarrow{FE} = m \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$CD \parallel AF \Rightarrow \overrightarrow{AF} = n \cdot \overrightarrow{CD}$$

2) Pēc vektoru saskaitīšanas likuma:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - k \cdot \overrightarrow{AB} - m \cdot \overrightarrow{BC} - n \cdot \overrightarrow{CD} = \vec{0}$$

$$(1 - k)\overrightarrow{AB} + (1 - m)\overrightarrow{BC} + (1 - n)\overrightarrow{CD} = \vec{0}$$

3) Vektori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ ir nekomplanāri (pretējā gadījumā dotā slēgtā laužtā līnija atrastos vienā plaknē).

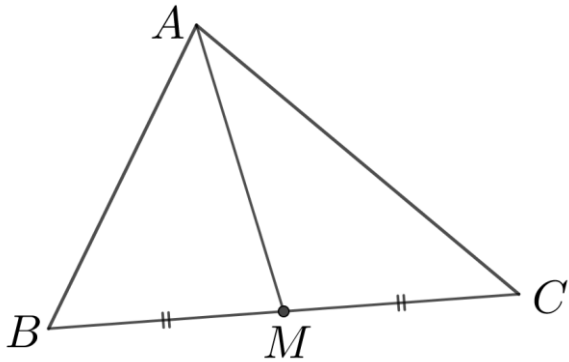
4) Lai trīs nekomplanāru vektoru summa būtu $\vec{0}$, tad koeficientiem pirms vektoriem jābūt 0.

5) Tātad $1 - k = 1 - m = 1 - n = 0$ jeb $k = m = n = 1$.

6) Līdz ar to esam ieguvuši, ka $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC}$ un $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD}$.

7) Tātad $AB = ED$, $BC = EF$ un $CD = AF$.

14. Dots trijstūris ABC , kuram $AB = c$, $BC = a$ un $AC = b$. Pierādīt, ka mediānas, kas vilkta no virsotnes A , garumu var aprēķināt pēc formulas $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.



1) Izmantojot $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{AC}$, izsakām $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

2) Aprēķinām $\overrightarrow{AM}$ skalāro kvadrātu:

$$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2)$$

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(c^2 + 2 \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \sphericalangle BAC + b^2)$$

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(c^2 + \mathbf{2bc \cos \sphericalangle BAC} + b^2)$$

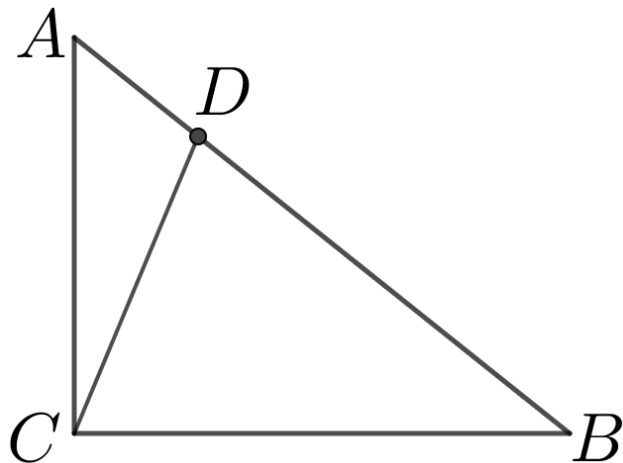
3) Pēc kosinusu teorēmas $\triangle ABC$ iegūstam, ka $a^2 = b^2 + c^2 - \mathbf{2bc \cos \sphericalangle BAC}$

4) Līdz ar to

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(c^2 + \mathbf{b^2 + c^2 - a^2} + b^2)$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

15. Uz taisnleņķa trijstūra ABC hipotenūzas AB atlikts tāds punkts D , ka $BD:DA = 3:1$. Aprēķināt CD , ja $CB = a$ un $CA = b$.



1) Apskatām $\overrightarrow{CA}$ un $\overrightarrow{CB}$

2) Izmantojot šos divu vektorus, izsakām

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}(-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$$

3) Aprēķinām $\overrightarrow{CD}$ skalāro kvadrātu:

$$\overrightarrow{CD}^2 = \frac{9}{16}\overrightarrow{CA}^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{1}{16}\overrightarrow{CB}^2$$

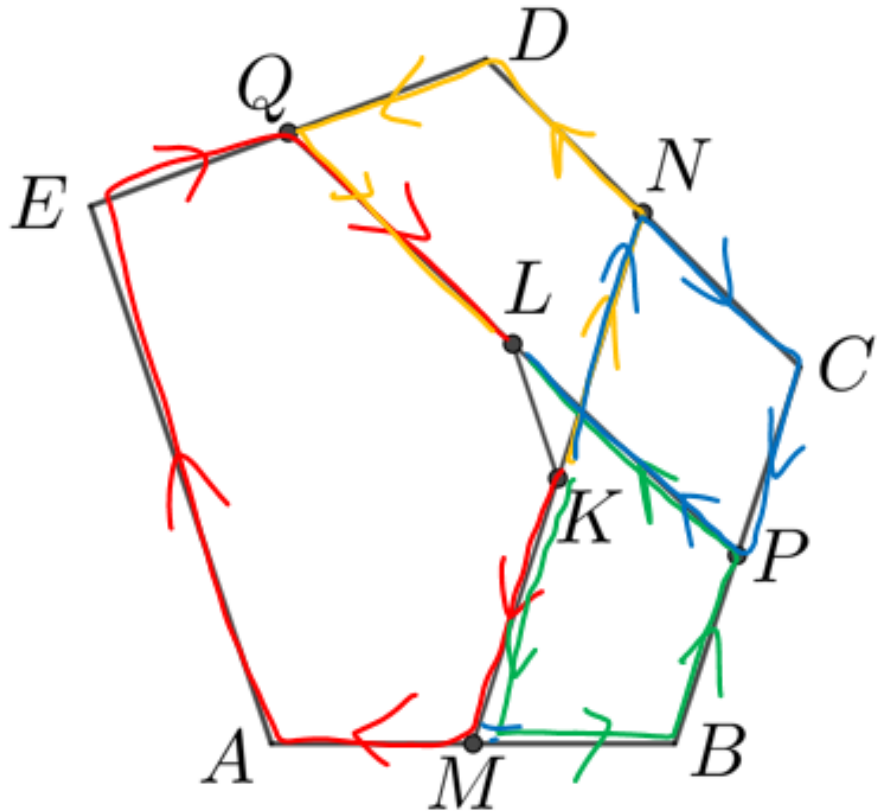
4) Tā kā $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$, tad $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$

5) Izmantojot, ka $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, iegūstam

$$CD^2 = \frac{9}{16}b^2 + \frac{1}{16}a^2$$

$$CD = \frac{1}{4}\sqrt{9b^2 + a^2}$$

16. Izliekta piecstūra $ABCDE$ malu AB, BC, CD, DE viduspunkti apzīmēti attiecīgi ar M, P, N, Q , bet nogriežņu MN un PQ viduspunkti apzīmēti attiecīgi ar K un L . Pierādīt, ka $KL \parallel AE$ un $KL = \frac{1}{4}AE$.



Izsakām $\overrightarrow{KL}$ četros dažādos veidos:

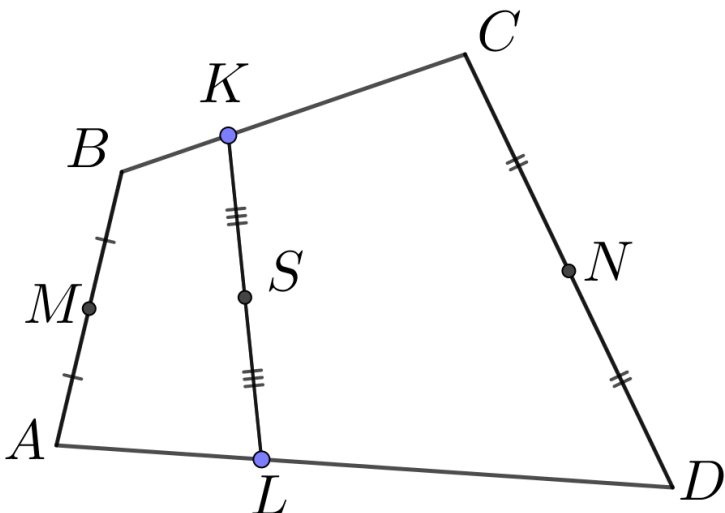
- 1) $\overrightarrow{KMAEQL}$
- 2) $\overrightarrow{KNDQL}$
- 3) $\overrightarrow{KNCPL}$
- 4) $\overrightarrow{KMBPL}$

Saskaitot iegūtās vienādības (pretēju vektoru summa ir $\vec{0}$), iegūstam

$$4 \cdot \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AE}$$

Tātad $\overrightarrow{KL}$ un $\overrightarrow{AE}$ ir kolineāri vektori, tātad $KL \parallel AE$ un $KL = \frac{1}{4}AE$.

17. Izliktā četrstūrī $ABCD$ malu AB un CD viduspunkti ir attiecīgi M un N , bet punkti K un L dala attiecīgi malas BC un AD attiecībā 1:2, tas ir, $\frac{BK}{KC} = \frac{AL}{LD} = \frac{1}{2}$. Nogriežņa KL viduspunkts ir S . Pierādīt, ka punkti M, S, N atrodas uz vienas taisnes!



1) Izsakām $\overrightarrow{MS}$ divos dažādos veidos:

$$\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KS}$$

$$\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LS}$$

2) Saskaitot abas vienādības, iegūstam, ka $\overrightarrow{MS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{AL})$

3) Izsakām $\overrightarrow{MN}$ divos dažādos veidos:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$$

4) Saskaitot abas vienādības, iegūstam, ka $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$

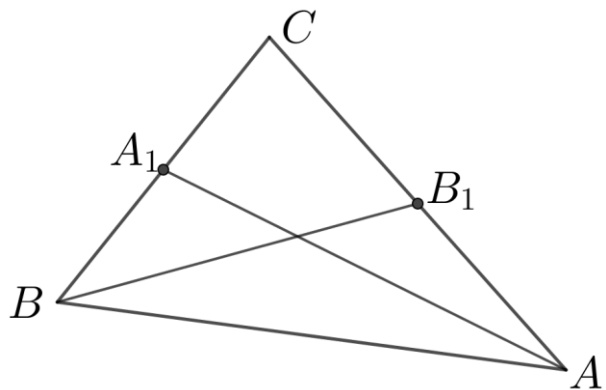
5) Tā kā punkti K un L dala attiecīgi malas BC un AD attiecībā 1:2, tad

$$\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BK} \text{ un } \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AL}$$

6) Tātad $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(3\overrightarrow{BK} + 3\overrightarrow{AL}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{MS}$

7) Esam pamatojuši, ka $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{MS}$. Līdz ar to punkti M, S, N atrodas uz vienas taisnes.

18. Starp trijstūra ABC malu garumiem pastāv sakarība $a^2 + b^2 = 5c^2$, kur $AB = c$, $BC = a$ un $AC = b$. Pierādīt, ka pret malām AC un BC vilktās mediānas ir savstarpēji perpendikulāras.



1) Pietiks, ja pamatosim, ka $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0$, jo tad $AA_1 \perp BB_1$.

2) Izmantojot $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$ un $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, izsakām

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA_1} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

3) Aprēķinām vektoru skalāro reizinājumu:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} &= \left(-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) \cdot \left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b}^2 - \frac{1}{2}\vec{a}^2 + \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} = \\ &= \frac{5}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{5}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}(b^2 + a^2) = \frac{5}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{5}{2}c^2 \end{aligned}$$

4) Tā kā $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos C = ab \cos C$, tad, izmantojot kosinusu teorēmu $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, iegūstam

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos C = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) = \frac{1}{2}(5c^2 - c^2) = 2c^2$$

5) Līdz ar to iegūstam:

$$\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} = \frac{5}{4} \cdot 2c^2 - \frac{5}{2}c^2 = 0$$

19. Pierādīt, šādu apgalvojumu: vienādība $\overrightarrow{OC} = k \cdot \overrightarrow{OA} + (1 - k) \cdot \overrightarrow{OB}$, kur O ir brīvi izraudzīts punkts, ir nepieciešamais un pietiekamais nosacījums tam, lai punkti A, B, C atrastos uz vienas taisnes.

Nepieciešamais nosacījums

Pieņemsim, ka izpildās vienādība

$$\overrightarrow{OC} = k \cdot \overrightarrow{OA} + (1 - k) \cdot \overrightarrow{OB}.$$

Pārveidojot iegūto vienādību, iegūstam:

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = k \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB});$$

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO} = k \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO});$$

$$\overrightarrow{BC} = k \cdot \overrightarrow{BA}.$$

Tātad $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{BA}$ un punkti A, B, C atrodas uz vienas taisnes.

Pietiekamais nosacījums

Pieņemsim, ka punkti A, B, C atrodas uz vienas taisnes.

Tādā gadījumā $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{BA}$ no kā izriet, ka $\overrightarrow{BC} = k \cdot \overrightarrow{BA}$.

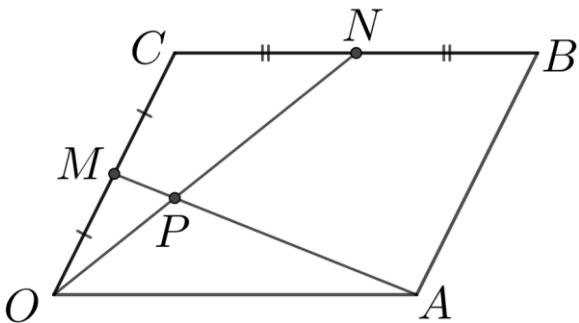
Pārveidojam šo vienādību (O ir brīvi izraudzīts punkts):

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO} = k \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO});$$

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = k \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB});$$

$$\overrightarrow{OC} = k \cdot \overrightarrow{OA} + (1 - k) \cdot \overrightarrow{OB}.$$

20. Paralelogramā $OABC$ punkti M un N ir malu OC un CB viduspunkti. Nogriežņi ON un AM krustojas punktā P . Aprēķināt $OP:ON$.



1) Apzīmējam $\overrightarrow{OC} = \vec{q}$ un $\overrightarrow{OA} = \vec{p}$.

2) Pieņemsim, ka $OP:ON = x$.

3) Tad iegūstam, ka $\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{ON} = x \cdot (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CN}) = x \cdot \left(\vec{q} + \frac{1}{2}\vec{p}\right)$.

4) Tā kā punkti P, M, A atrodas uz vienas taisnes, tad iegūstam (skat. 19. uzd.), ka

$$\overrightarrow{OP} = k \cdot \overrightarrow{OM} + (1 - k) \cdot \overrightarrow{OA} = k \cdot \frac{1}{2}\vec{q} + (1 - k) \cdot \vec{p}.$$

5) No 3) un 4) iegūstam, ka

$$x \cdot \vec{q} + \frac{x}{2}\vec{p} = \frac{k}{2}\vec{q} + (1 - k) \cdot \vec{p}.$$

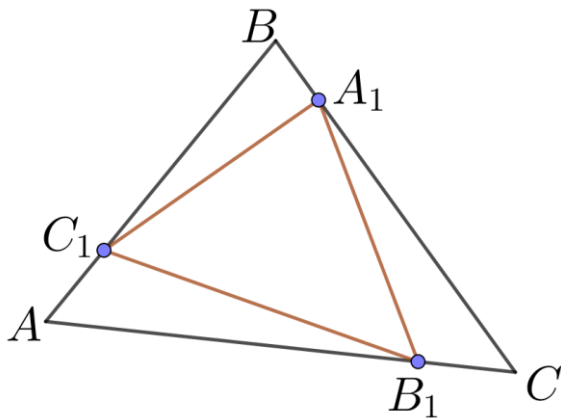
6) Tā kā vektora izteikšana ar diviem nekolineāriem vektoriem ir viennozīmīga, tad

$$\begin{cases} x = \frac{k}{2} \\ \frac{x}{2} = 1 - k \end{cases}.$$

7) Atrisinot vienādojumu sistēmu, iegūstam, ka $x = \frac{2}{5}$.

8) Tātad $\frac{OP}{ON} = \frac{2}{5}$.

21. Dots trijstūris ABC , uz kura malām AB , BC , CA attiecīgi atlikti tādi punkti C_1 , A_1 , B_1 , ka $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = k$.
Pierādīt, ka trijstūra ABC mediānu krustpunkts sakrīt ar trijstūra $A_1B_1C_1$ mediānu krustpunktu!



1) Punkti A_1 , B , C atrodas uz vienas taisnes, tāpēc

$$\overrightarrow{OA_1} = k \cdot \overrightarrow{OB} + (1 - k) \cdot \overrightarrow{OC}.$$

2) Līdzīgi iegūstam, ka

$$\overrightarrow{OB_1} = k \cdot \overrightarrow{OC} + (1 - k) \cdot \overrightarrow{OA};$$

$$\overrightarrow{OC_1} = k \cdot \overrightarrow{OA} + (1 - k) \cdot \overrightarrow{OB}.$$

3) Trijstūru mediānu krustpunktus apzīmējam ar M_1 un M .

4) Izsakot $\overrightarrow{OM_1}$ ar rādiusvektoriem, iegūstam:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_1} &= \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}) = \\ &= \frac{1}{3} (k \cdot \overrightarrow{OB} + (1 - k) \cdot \overrightarrow{OC} + k \cdot \overrightarrow{OC} + (1 - k) \cdot \overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{OA} + (1 - k) \cdot \overrightarrow{OB}) = \\ &= \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OM}. \end{aligned}$$

5) Esam ieguvuši, ka $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM}$, tāvad punkts M_1 sakrīt ar punktu M .

Piezīme. Risinājumā tika izmantots fakts, ka trijstūra mediānu krustpunkta rādiusvektors ir visu triju virsotņu rādiusvektoru vidējais aritmētiskais.

22. Izvēloties uz kuba šķautnes virzienu, iegūstam vektoru. Katra vektora garums ir vienāds ar kuba šķautnes garumu.

- a) Vai var izvēlēties virzienu uz visām 12 kuba šķautnēm tā, lai visu 12 iegūto vektoru summa būtu nulles vektors?
- b) Vai virzienus var izvēlēties tā, lai visu vektoru summa būtu nulles vektors, bet nevienā skaldnē esošo četru vektoru summa nebūtu nulles vektors?

a) Jā, var.

b) Jā, var.

Abos gadījumos vektorus var izvēlēties, kā parādīts attēlā.

